DE
VIRIBVS
MOTRICIBVS

PRAESIDE

CHRISTIANO AVG. HAVSEN

MATHES. PROF. ORD. ET FAC. PHIL. H. T. DECANO

DISPVTABIT

AVCTOR

GOTHOFREDVS HEINSIVS

NVMBVRGENSIS.

D. 17. FEBR. cIↄ Iↄcc XXXIII.

LIPSIAE

APVD JOH. GEOG. SCHNIEBES.



PERILLVSTRI AC EXCELLENTISSIMO DOMINO,

DOMINO

GOTTL. HIERONYMO A LEIPZIGER,

DYNASTAE IN HEYDA &c.

SERENISSIMI AC POTENTISSIMI ELECTORIS SAXONIÆ CONSILIARIO INTIMO ET CLAVIGERO NEC NON EQUITI ORDINIS DANEBROGICI

DOMINO SVO GRATIOSISSIMO

PRIMITIAS HASCE

ACADEMICAS

ANIMO DEVOTISSIMO

DICARE

SVAQVE STVDIA

PATROCINIO EXCELLENTIAE

SVAE COMMENDARE

AVSVS EST

HVMILLIMVS CLIENS

GOTHOFREDVS HEINSIVS

MATHEM. ET IVR. STVD.

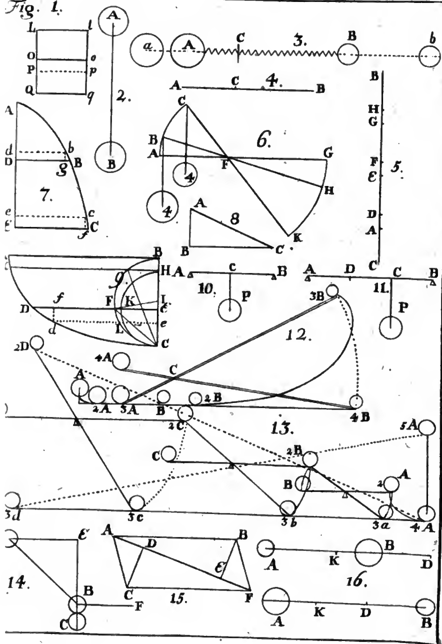


Fig. 1.
L l O o P p Q q
A 2. B
a A C 3. B b
A C 4. B
B H G F ℰ 5. D A C
C B A F G 6. H K 4 4
A d b D g B 7. e c f C f
A 8 B C
B H A f F K I D ℰ d L e C 9.
A C B 10. P
A D C B 11. P
3B 12. 4A C A 2A 3A B 2B 4B 2D
2C 13. 5A C 2B B 2A 3d 3c 3b 3a 4A
ℰ B C F 14.
A D B ℰ C 15. F
A K B D 16. A K D B



DE VIRIBVS MOTRICIBVS.

In sequentibus varia deducuntur, ex quibus judicium fieri potest de quantitate virium motricium. Theorema Leibnitianum, quod motibus substituit motuum quadrata per massas divisa erroneum esse quibusdam videtur, dum alii contra contendunt & argumenta conquirunt, quibus necessitas ejus possit evinci. Quæ nobis ea in re sese obtulerint, præsens aperiet Dissertatio, quæ innititur paucis quibusdam suppositis vel ex utraque parte diserte concessis, vel facile concedendis.

SVPPOSITIONES.

1.

MOtum nec nasci nec perire absque vi, & vires non movere, nisi agant. Unde actio vis est quæ motum generat. Quod decidit de vi, id decidit inter agendum & per actionem, id est quod vis impendit id agendo impendit.

2. Omnis

2. Omnis actio est ad motum; sed non omnis actio motum generat. Nam in pressionibus veris ne nascens quidem motus est, quamvis verum sit motus nascentes æqualibus temporibus minimis genitos esse proportionales istiusmodi veris & meris pressionibus.

3. Vires quæ corpora æqualia movent iisdem velocitatibus sunt æquales. Et quæ vis idem corpus movet majore velocitate, illa est major, quæve minore minor. Vires autem quæ movent inæqualia corpora iisdem velocitatibus, sunt ut corpora.

4. Actiones virium moventium instantaneæ sunt in ratione composita virium ipsarum & temporum.

5. Actiones virium quibus pondera æqualia elevantur per spatia elementaria æqualia esse æquales & vice versa.

6. Præterea assumuntur leges notæ motuum variatorum 1. $fdt = dv$. 2. $ds = vdt$ & quæ hinc consequuntur ut $fds = vdv$ &c. Ubi $f\,v\,t\,s$ significant vim motricem instantaneam seu acceleratricem vel retardatricem, velocitatem, tempus, spatium respective.

PROPO-

PROPOSITIO I.

SI Vis moveat corpus, & motus semel genitus perseveret immutatus: Vis post motum productum non amplius agit. Et si non amplius agat, motus perseverabit immutatus.

1. Agat enim vis post motum aliquem genitum, & status corporis mutabitur, proinde motus antea genitus augebitur vel minuetur, superveniente actione nova vis in eandem plagam vel contrariam, nec proinde perseverat immutatus *contra hyp.*

2. Mutetur motus & sic motui genito adjicietur novus vel subducetur contrarius. In utroque casu vi opus est *Sup.* 1. & adeo actione, *contr. hyp.*

Cor. Igitur in motu uniformi post motum semel genitum nulla exercetur actio nova, nec producitur novus effectus. Spatia igitur quæ cum temporibus crescunt non sunt effectus vis corpus moventis. Nam spatia mutantur & crescunt actione non mutata, imo cessante. Et vis effectum non producit quando non agit. Mutare continuo spatia cum tempore, conditio est unius motus tanquam solitarii effectus perseverantis; sine ea conditione motus non esset, quod productum est.

Schol. Non negamus vim esse corporis moti, sed negamus aliquem ejus effectum esse in ipso corpore moto: id est asserimus non agere, quando motus semel productus est, nec deinceps mutatur. Negamus ad conservationem ejusdem motus in corpore opus esse actione eadem potentiæ in singulis spatii elementis. Productus enim absque vi non perit. Quid igitur novi produceretur, ubi nil adest præter productum. Neque novum vel insolens est po-

nere vim quæ nihil agat. Vim enim insitam agnoscunt omnes, quamvis exercitium ejus dari id est actionem edi non concedant, nisi in status mutatione per vim aliam impressam facta. Alia ratio est pressionum; nam si corpus pressum plane non cedit, motus est nullus, status corporis non mutatur, consequenter vis insita destruit pressionem, & ut corpus premi continuet, opus est succedere novam vim prementem & novam actionem. Sic omnia reciprocatione actionum contrariarum & æqualium quæ conantur mutare statum prementis & pressi, consumuntur. Actiones hic sunt ut vires prementes. Nam pressio effectus instantaneos ut jam dictum est & ejusmodi habet, qui cum tempore non crescunt, sed continuo nascuntur & pereunt per vices. Si id quod premit ad quamlibet pressionem exercendam opus habet status sui quadam mutatione, impendet vires pro tempore; & hoc modo debilitantur vires animales premendo & tendendo.

2. Si vero corpus pressum cedit, movebitur etiam corpus premens, & vis motum confert prementi & presso simul, qui semel genitus etiam perseverabit, quamvis actio cesset. Sic super glacie homo seipsum cum traha quam premit in motum concitat, & motus hic semel productus etiam cessante actione perseverat, dum pedibus innixus vel conscensa traha labitur etiam nolens super glacie cum traha motu perseveraturo, si resistentia abesset. Sed cum per frictionem accedat vis impressa, quæ statum corporis hujus compositi continuo mutat, exercetur vis insita & agendo paulatim consumitur. Hoc modo quod vis animalis toti corpori suo confert id vi insita conservatur, & in obstacula agit ut in aliis viribus insitis fieri observatur. Sic etiam in saltu ubi propellitur corpus actione pedum in pavimentum, cessante actione idem pergeret moveri nec unquam in Terram recideret, abstrahendo a resistentia medii, nisi exercitio conti-

continuo vis conceptæ & insitæ ad actiones gravitatis, minueretur actio & vis elevans, tandemque evanesceret.

3. Sed quando vis animalis uni vel alteri membrorum quibus tanquam organis utitur, motum confert; hic quidem motus simul confertur corporibus, quæ firmiter affixa sunt organis, & in ipsis perseverat ubi subito separantur ab organo. Nihilominus etiam consumi possunt hi motus in corporibus, antequam ab organo separentur, actionibus nempe antagonisticis musculorum. Sic motus brachii confertur lapidi manu prehensi, & lapis vi insita moveri pergit ubi dimittitur. Sed cum vis animalis id habeat peculiare, ut statum partium sui corporis mutare possit tempore quovis & quavis directione: poterit contrariis actionibus retardare paulatim & tandem consumere motum brachii & lapidis, idque in spatio sensibili vel insensibili pro magnitudine actionum. Insensibile autem voco non quod elementare, vel differentiale, sed quod minus quovis sensibili. Nam vis in infinitum intendi non potest, nec motus conferri vel destrui in instanti & per spatium, quod sit quantitas fluxionalis. Possunt tamen variabiles vires uti sunt animales ita intendi, ut quod minoribus impulsibus ex lege continuitatis produxerant, id deinceps servando eandem legem denuo destruant actionibus successivis, quæ sint in ratione ad priores quavis sensibili majore. Quibus observatis manifestum est, si lapis ubi separatur a manu ad sensum mota, moveri non pergat, non consequi nihil motus ipsi insitum fuisse vel collatum a manu movente; sed potius insitam vim, quam una series actionum generaverat, alia serie fuisse consumtam, nec quicquam hic fieri quod ubique & in omni vi insita evenire non debeat.

PROPOSITIO II.

In descensu gravium accelerato, dF *incrementum nascens vis vivæ ipsi* fdt, *non vero ipsi* fds *est proportionale*.

Nam cum vis viva sit vis corporis moti, qua actione nascitur motus ea nascitur vis viva. Sed motus nascitur actione vis *f Sup. 6.* quæ est ut fdt *Sup.* 4. Igitur actione fdt nascitur vis viva, id est oritur dF.

Sit fds ut dF, si fieri potest, & fds æqualibus erunt dF æquales, inæqualibus inæquales. Sed æqualibus fdt fiunt fds inæquales; ergo æqualibus fdt fiunt dF inæquales Q. F. N. Nam cum $fdt = dv$, velocitates nascentes sunt æquales, si fdt sunt æquales *Sup. 6* & ideo dF æquales *Sup.* 3.

Schol. Cum per *Sup. 6.* vires corporis dati æqualibus velocitatibus moti sint æquales, si velocitates sunt æquales, hoc sane valebit etiam de viribus in instanti moventibus cum hæ vires sint motrices tam veræ, quam quæ finitis velocitatibus movent. Quamvis enim hæ vires eædem sint cum pressionibus & hoc respectu eodem nomine virium mortuarum, si opus est, comprehendi possint, differunt tamen actiones in casu utroque quam maxime. Nam pressiones actionibus quas edunt simpliciter proportionales sunt; cum ex effectibus præcedentium nihil conservetur in corpore, dum superveniunt consequentes; pressiones vero in motu nascente producendo agunt in ratione composita fdt & hinc pro tempore quo applicantur; id est quamvis quæ tempore dt in actionem veniunt sint ut fds, non tamen actiones edunt nisi juxta $fdt = \frac{fds}{v}$, seu quæ sunt ut ipsæ vires directe & effectus geniti & perseverantes præcedentium omnium v, inverse. Et quæ actiones in ratione hac composita $\frac{fds}{v}$ conferunt elementa motus, illæ sane in eadem ratione con-

ferent

ferent dF incrementa vis vivæ, cum quæ pars ipsius f nihil producit motus, nihil etiam vis vivæ producere possit. Interim videmus aliquos assumere quod dF augeantur etiam pro magnitudine velocitatum acquisitarum, quamvis concedant *Sup. 6.* actiones motus instantanei productrices $f\,dt$ seu $\frac{f\,ds}{v}$ minui pro aucta v, quæ tam certo contradictionem involvunt, quam certum est quod actiones hæ eædem sint cum actionibus productricibus τῶν dF. Celeberrimus *Jacobus Hermannus T. 1. Comment. Petrop. p. 24.* "Addidi præterea" in diverso statu corpus descendens esse in diversis temporis articu-" lis & non modo massam corporis C, sed etiam statum ejus seu mo-" tum in considerationem simul cum gravitate agente & tempusculo" actionis trahendum esse, idque hoc modo ostendi. Sit $LO = t$" *Fig. 1.* tempus quo vis viva V acquiritur, $OP = dt$, dV elementum vis acqui-" sitæ vel incrementum ejus durante tempusculo dt. Cum incre-" mentum istud vis vivæ dV nascatur à gravitate g in corpus C agente," quod corpus jam habeat celeritatem u & massam M, atque adeo" motus qvantitatem Mu, quantitatis hujus motus necessario ratio" habenda est, nam in hoc statu in quo est mobile, celeritas ab ipso" inseparabilis est; componetur igitur incrementum vis vivæ ex" hisce tribus, nempe ex g, Mu & dt, eritque adeo necessario dV" $= gMu\,dt$, non vero ut vulgo supponitur $dV = gM\,dt$. Jam vero" est $u\,dt = ds$, si hoc ds elementum spatii designet, & gM signifi-" cabit pondus corporis C..... Ex quo apparet, quod etiam tem-" poris & celeritatis consideratio ad eandem virium mensuram con-" ducat, quam ante invenimus, modo recte ineatur". Sed quam recte hic inita sit, perpendant, qui largiuntur motuum incrementa pro magnitudine τῶν u minui. Neque enim in præcedentibus præter afferta nuda quicquam continetur; cum operæ pretium imprimis fuisset ostendere, quod dV seu dF augeantur in eadem ratione in qua incrementa motus minuuntur.

Idem

Idem Celebris vir eodem loco p. 20. 21. 22. sic de actionibus virium acceleratricium seu incrementa motus instantanea producentium loquitur, ut quis faceret, si de determinandis omnibus pressionibus in spatio aliquo sibi succedentibus quæstio esset. Ex A in B des-
Fig. 2. cendat corpus, motu uniformi & manu subjecta interea sustineatur; sint vero impressiones gravitatis in corpus, quas manus sustinet, in omnibus spatii A B punctis æquales; et summa omnium pressionum quas patitur manus utique est ut A B $\times p$, intelligendo per p unam harum impressionum. Cujus rei ratio est quod unius impressionis seu vis prementis actio tanta sit, quanta alterius nec ulla conferat effectum perseverantem, pro tempore majorem vel minorem. Quod cum aliter se habeat in actionibus quas exercet gravitas movens, ut supra vidimus, manifestum est, vim vivam ex mortuis ita non componi, ut illo casu componitur summa omnium pressionum ex pressionibus singulis.

Illustris Geometra *D. Jo. Bernoullius* in Tractatu, *Discours sur les*
Fig. 3. *Loix de la Communication du mouvement p. 21. Cor. 3. Hyp. 1.* Postquam invenerat corporibus A & B ab Elatere ex dato aliquo statu tensionis & flexus sui A B libere discedente in *a b* statum, conferri velocitates massis reciprocas & adeo motus æquales, vires motrices ait esse ut A C CB, propterea quod omnes partes Elateris inter C & B impendantur unice producendo motui B, & omnes partes ejusdem Elateris quæ sunt inter C & A impendantur unice motui corporis A, hincque vires vivæ corporum B & A sint effectus pleni virium omnium elasticarum in CB & A C. Quæ omnia eodem redeunt cum assumtis *Hermanni. Gravesandius* dum idem explicare conatur, seipsum etiam refellit. Nam ad æqualia incrementa motus nascentis, impulsus elastrorum requirit, quæ sint ut 1, 2, 3 &c. & in secundo impulsu unum in tertio duo in quarto tria elastra agnoscit, quæ corpori motus nihil conferunt. Ex quo sequitur sane nec vis vivæ quicquam conferre. Si de quantitate virium præsen-

ſentium in omnibus iſtis elateribus quæſtio eſſet, recte definiretur per ſummam omnium. De eo autem non quæritur, & nemo unquam aliter docuit, quam aream virium proportionalem eſſe quadratis velocitatum. Id quæritur, an omnes vires quæ agunt, agant in corpus tota energia ſua, quando vim corporis moti ſeu vivam generant, Hoc aſſerit *Gravesandius* in propoſitione, negat re ipſa in demonſtratione, dum in ſingulis incrementis motus complures ponit quæ in corpus non agunt. Argumentornm hujus generis defectum perſpexit Clariſſimus *Daniel Bernoullius*, qui *p.130. T.1. Comment. Petrop.* „Per menſuram virium vivarum intelligit numerum elaſtrorum, quæ corpus tendere poteſt, priuſquam motum ſuum perdat," quæ definitio ut nominalis omnino ferenda eſt, ſed in corpore non ponit quod omnibus elaſtris ineſt, quæ corpus flectere poteſt. Conceſſa vero Definitione, poſtquam oſtendiſſet $fds = vdv$ ex legibus motuum variantium & adeo vires vivas (ſenſu definitionis, quo ſenſu res vera eſt) eſſe ut v^2, ſequentia ſubjungit. "Sed unum hic obſervandum eſt; nimirum ſummam omnium preſſionum" momentanearum, quas corpus ſuſtinuit, dum tenderet quatuor ela-" ſtra, non quadruplam ſed duplam fuiſſe, æſtimando ſummam omnium" presſionum momentanearum, non ſolum ex ipſis preſſionibus, ſed &" ex temporibus quibus ſingulæ applicatæ fuerunt, id eſt ex $S\,pdt$; nam tantum agit Libra duobus minutis quantum duæ libræ uno minuto," ſeu tanta eſt ſumma omnium preſſionum momentanearum in priori" caſu, quanta in poſteriori; eſt vero $pdt = dv$, ergo $S\,pdt = v$." Vnde ſi quis vim corpori inſitam definiat ex ſumma omnium pres-" ſionum momentanearum quas corpus directe ſuſtinere poteſt," priusquam motum ſuum perdat, hic jure illam proportionalem" faciet velocitatibus ſimplicibus".

Ceterum ex propoſitione conſequitur vim vivam quacum aſcendit corpus grave habens certam velocitatem initialem eadem actione perdere ſua dF qua perdit ſua dv & qua actione non conſu-

muntur dv ea nec consumi dF & adeo non esse proportionalem spatio vel quadrato velocitatis, sed ipsi velocitati. Nihilominus extinctionem vis vivæ seorsim & independenter a præcedentibus deinceps considerabimus.

PROPOSITIO III.

Si corporis motui resistitur, quod vis vivæ superandæ resistentiæ R *impenditur, proportionale est ipsi* Rdt.

Augeatur Rdt in ratione $1:m$ & si fieri potest augeatur dF in ratione minore $1:n$ posito $n > m$ eodem tempusculo elementari. Quoniam Rdt crescit in ratione $1:m$, in eadem ratione crescet $-dv$, decrementum instantaneum velocitatis residuæ, *Sup. 6.* id est decrementum motus in corpore dato; unde motus decremento instantaneo majore, minus est dF decrementum vis vivæ, vel dv majore minor est dF Q. F. N. Nam per *Sup. 3.* si velocitas major in corpore dato vis corporis hac velocitate moti est major, vis autem corporis moti motu $m \times v$ si est F, erit utique dF vis corporis moti motu $m \times dv$. Eodem modo ostenditur dF in ratione majore augeri non posse.

Schol. Casus, quibus resistitur corpori moto in universum sunt tres. Vel enim corpus movetur uniformiter & simul superatur resistentia durante motu toto, velocitate hinc non affecta; vel movetur initiali quadam velocitate paulatim a resistentiis consumenda, ut motus oriatur retardatus; vel corpus movetur continua actione virium primitivarum, cum continua resistentia ut oriatur motus vel minus acceleratus vel retardatus.

Primus Casus est corporis moti super plano horizontali, motu uniformi, a manu premendo vel trahendo movente continua actione, sic ut hac cessante, id est ubi manus sistitur, corpus moveri non pergat. Fiat ejusmodi motus super AB, incipiendo ab A, ubi velo-
Fig. 4. citas sit v, quacum moveri incipiat; patiatur autem resistentiam sic

ut

ut ubicunque manus premens motum ſiſtat, ſiſtatur etiam motus corporis, verbi cauſa ad C. Quantum ad manum conferentem velocitatem *v*, ſub initium motus, idem agit quod egiſſet ſi corpori aquæ innatanti, vel plano levi innixo, vel corpori rotanti vel pendulo contuliſſet eandem velocitatem *v*. Hic vero conſervaſſet motus & velocitatis aliquid etiam minimo digiti impulſu movente. In Caſu autem de quo loquimur non conſervat per *hyp.* unde deſtructus eſt motus, ex quo manus ceſſavit premere. In ſpatio ſenſibili non deſtructus eſt motus, alias corpus poſt ceſſationem preſſionis à manu exercitæ perrexiſſet moveri per ſpatium ſenſibile motu retardato, *contra hyp.* In ſpatio elementari non eſt deſtructus, nam motus nec perit nec confertur in inſtanti, ſed tantum motus elementum. Ergo deſtructus eſt in ſpatio quovis ſenſibili minore, quod optime ſpatium inſenſibile vocabitur. Ut motum ſemel conceptum ſervet, qui in inſenſibili deſtruitur, opus eſt manum præter motum productum tantum continuo conferre quantum a frictione conſumitur: vel quod eodem redit, manus actionibus continuis tollere debet effectum frictionis. Erat autem effectus hic deſtructio velocitatis *v* in ſpatio inſenſibili, & actiones tantæ, quantæ ſunt deſtruentes motum in aliquo ſpatio, eundem etiam in eodem producere poſſunt. In ſingulis igitur ſpatiis inſenſibilibus idem aget manus quod egit quando primum velocitatem corpori contulit. Et adeo vis ejus eſt ut ſpatium & velocitas conjunctim, cum reſiſtentia ſit ut velocitas in quavis inſenſibili parte ſpatii, & ſumma reſiſtentiarum omnium ut ſumma omnium partium inſenſibilium ſeu ſpatium totum. Augendo velocitatem vel minuendo frictionem res eo perduci poteſt ut in ſenſibili ſpatio deſtruatur motus. Itaque videmus vel velocitatem parvam vel frictionem magnam in cauſa eſſe, quod motus non perſeveret. Hoc igitur eveniet in corpore omni quod movetur velocitate, quæ in ſpatio inſenſibili a data reſiſtentia deſtrui poſſit.

 Eodem

Fig. 5. Eodem modo si vis elevat corpus grave motu uniformi ex A in B & sit in C A motus ille genitus a quiete in C (generabitur autem vi acceleratrice, quæ sit excessus impressionum vis moventis, ut manus, super vim ponderis acceleratricem f; ut si impressiones manus generent dv, & ideo majores sint quam fM veluti nfM, vis acceleratrix manus futura sit $(nfM - fM) : M$ seu $nf - f$, & ideo etiam corporis) cum velocitate v, corpus sibi relictum ascendet ex A per spatium AD, tantum, quanto opus est ad destruendam v velocitatem a gravitate acceleratrice f. Sit v. c $nf - f = \frac{1}{4} f$, & $n = \frac{5}{4}$. Jam quæ velocitas gignitur in spatio AC viribus acceleratricibus $\frac{1}{4} f$, ea viribus f gignitur in spatio subquadruplo, tempore etiam subquadruplo & propterea in hoc etiam consumitur. Nam per *Sup. 6* $fds = vdv$, & hinc $s = \frac{v^2}{2f}$, & posita v constante $s = \frac{1}{2f}$, & ubi vis acceleratrix est $\frac{1}{4} f$, fit $s = \frac{2}{f}$ seu $\frac{4}{2f}$, item ob $dt = \frac{v}{f}$, si $v = 1$ & f fit $\frac{1}{4} f$, erit $t = \frac{4v}{f}$ quadruplum prioris ut adeo primum spatium sit secundi subquadruplum & tempus temporis. Quamobrem corpus sibi relictum ascenderet per AD $= \frac{1}{4}$ AC, vi velocitatis collatæ per AC, accedente autem operatione vis elevantis, ut manus, ascendet simul per DE $=$ AC. Unde eodem tempore quo v genita est movendo per CA, movebitur corpus à manu elevante per AD $+$ ED $= \frac{5}{4}$ AC, & ob similes causas tertio tempusculo prioribus æquali corpus elevabitur per EF $+$ FG $=$ AD $+$ ED $= \frac{5}{4}$ AC &c. ut motus sic fiat uniformis inde ab A, cum æqualibus temporibus ab A ascendat corpus per spatia æqualia; habeatque hic motus hoc singulare ut actione vis elevantis cessante in D vel F vel H nihil ejus supersit, ad E vero G &c. si cesset, perexiguum & insensibilem impetum ultra se elevandi conservet, nisi CA DE &c. fuerint magnitu-

gnitudinis paulo majoris. In his ubique ſupponimus manum elevantem ſubjici corpori libere, ſic ut cum ipſo non cohæreat.

Manifeſtum autem in ſpatiis AE + EG + GB toties eandem vim impendi ad reproducendum v in ſingulis AD EF GH deſtructam, quoties unum AE occurrit in multitudine omnium; ut adeo vis tota manus elevantis per ſpatium AB ſit ut $v \times$ AB. Atque hi ſunt caſus in quibus vires vivæ ſeu motrices ſunt ut ſpatia in velocitates, ſeu ut quadrata velocitatum in tempora, & poſito tempore eodem ut quadrata velocitatum, poſita velocitate eadem ut tempora, vel ut ſpatia.

2. Ad primum Caſum etiam pertinent motus ponderum, quæ elevantur ope vectis vel alterius potentiæ manualis uniformiter. Quare hic vis motrix quæ impenditur ſemper eſt ut velocitas in ſpatium, ſeu maſſis diverſis ut vsM. In unius ergo ejuſdemque vectis AG diverſis elevationibus ad A extremum, erunt vires impenſæ ut sM. Unde in vecte quovis perinde ac abſque vecte tantum impenditur vis elevando quatuor libras per AB ſimplum ſpatium, & tempore ſimplo, quantum elevantis unam libram per ſpatium quadruplum AC eadem velocitate, & adeo quadruplo tempore, ob motum uniformem. Ad eundem caſum primum referendi quoque ſunt motus corporis preſſi & premendo uniformiter tranſlati per ſpatia repleta corporibus mollibus, ut cerâ; motus corporis elaterem flectentis inter movendum, nihil tamen exinde mutatâ velocitate; & alii quilibet ſub iiſdem conditionibus. *Fig. 6.*

3. Ad ſecundum caſum referri poſſunt motus retardati gravium cum initiali velocitate aſcendentium, motus in omnibus mediis reſiſtentibus & cum data velocitate initiali cœpti, motus globorum cadentium ex data altitudine in corpora mollia ut ceram &c. vel in elateres, & velocitate acquiſita tantum agentium & ut videtur, corpora dum in ipſo actu conflictus velocitatibus ſuis minuuntur, &c.

Tertius denique Casus obtinet in corporibus quæ patiuntur & resistentiam continuam & accelerationem continuam, ut fit in motu gravium per aerem & alia fluida, ubi gravia sibi permittuntur; motus ponderum elateres flectentium in planis non horizontalibus, &c.

4. Et in secundo casu quidem constat esse $-dv = R\,dt$; in tertio $\pm dv = (\pm f \mp R) \times dt = f - R \times \pm dt$ vi *Sup.6.* (ubi R resistentiam significat) ex his vero formulis omnia deducuntur quæ auctores de motibus in casu resistentiæ continuæ prodiderunt, & quæ exponi hoc loco nil attinet. Id tantum indicandum fuit, quod actio resistentiæ sit quæ motum consumat, ut ex formulis perspicuum; quod qua actione non consumatur motus ea nec consumatur vis viva, proinde quod vis vivæ decrementum non sit effectus ipsorum $R\,ds$, cum actione quæ sit ut $R\,ds$ non consumatur motus: Denique quod $-dF$ decrementum vis vivæ sit proportionale ipsi $R\,dt$ & ideo summa τῶν $-dF$ seu consumta F vis motrix proportionalis summæ τῶν $R\,dt$.

PROPOSITIO IV.

IN ascensu gravium retardato vis motrix cujus energia corpus ascendit cum data velocitate initiali, quæve extinguitur inter ascendendum, est ut ipsa velocitas, quacum ascendere incipit.

Nam si ABC est Linea velocitatum, relatarum ad spatium
Fig.7. EA in quo vis motrix F ascendendo consumitur, & capiuntur velocitates duæ utcunque, EC & DB, quarum primæ respondeat F vis motrix, secundæ φ, erit actio primæ ad actionem secundæ ut $F\,dt$ ad $\varphi\,d\tau$, *Sup.4.* $d\tau$ denotante tempusculum per Dd & dt tempusculum per EC. Est autem $F\,dt : \varphi\,d\tau = \frac{F \times Ee}{EC} : \frac{\varphi \times Dd}{DB}$, & facien-

faciendo $Ee = Dd$ ut $F \times DB : \varphi \times EC$; Sed ob $Dd = Ee$ erunt actiones illæ (massa posita eadem) æquales *Sup.* 5. Quare $F \times DB = \varphi \times EC$ & adeo $F : \varphi = EC : DB$.

Si $D\,d$ non est ipsi $E\,e$ æquale erit $\frac{F \times Ee}{EC} : \frac{\varphi D\,d}{DB} = f \times Ee : f \times Dd$, & auferendo utrinque rationem $Ee : Dd$, fiet denuo $\frac{F}{Ec} = \frac{\varphi}{DB}$ seu $F : \varphi = EC : DB$.

Aliter.

Cum per *Prop. præc.* $-dF$ sit ut $R\,dt$, resistentia vero hic sit gravitas constans f, erit $-F$ seu vis tota in ascensu corporis extincta ut $f \times t$ id est ut v velocitas per *Sup.* 6,

Porro vires æquales sunt, quæ extinguuntur æqualibus summis resistentiarum seu æqualibus $S : R\,dt$, & scribendo f loco R, æqualibus $ft \times M$. Sed $f \times t \times M = \frac{1}{n} \times f\,t \times n\,M = \frac{1}{n} f \times n\,t \times M = n\,f \times \frac{1}{n} \times t \times M = n\,f \times t \times \frac{1}{n} M = f \times n\,t \times \frac{1}{n} M$. His igitur Casibus omnibus fiunt vires æquales. Sed his casibus omnibus velocitates, quæ sunt ut ft, $\frac{1}{n} ft$, $\frac{1}{n} f \times n\,t$, $n\,f \times \frac{1}{n}\,t$, $n\,f \times t$, reciproce sunt ut massæ; Quare si vires sunt æquales erunt velocitates reciproce ut massæ. Et igitur vires sunt in ratione composita velocitatum & massarum. Quod denuo probat in massa data vires esse ut velocitates.

Cor. 1. In plano inclinato AC gravitas retardatrix est $\frac{AB}{AC} \times f$, *Fig.* 8. sumendo f pro gravitate in perpendiculo; sit $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{n}$, & ob $f \times t \times M = \frac{1}{n} f \times n\,t \times M$, vires æquales movent æquales massas cum iisdem velocitatibus initialibus, per BA & CA, temporibus quæ sunt

funt ut $1:n$ feu ut AB ad AC; inæquales autem maſſas cum velocitatibus ipſis Masſis & AB AC reciprocis eodem tempore, propter $ftM = \frac{1}{n}f \times t \times nM$, quorum prius de perpendiculo, poſterius de plano inclinato intelligendum eſt. Sit $n = 4$ ſeu AB $= \frac{1}{4}$ AC, & vires æquales erunt, quæ eodem tempore elevabunt unam libram in perpendiculo & quatuor libras in plano inclinato velocitatibus ut $4:1$. Unde patet vires æquales extingui poſſe temporibus æqualibus & inæqualibus, pro conditione reſiſtentiarum, & hoc conſequi ex conſideratione temporis & reſiſtentiarum, tantum abeſt ut conſideratio temporis in virium menſura ineunda locum non habeat, propterea quod vires æquales conſumi posſint inæqualibus temporibus & æqualibus.

Fig. 12. Cor. 2. Si vectis 3A 3B in quo $3BC:3AC = 4:1$ & $3A:3B = 4:1$, moveri poſſet a pondere 3B deſcendente per pedes ſedecim motu accelerato, aſcenderet 3A in 4A per pedes quatuor tempore eodem, & quidem motu accelerato cum velocitatibus ubique æqualibus quartæ parti velocitatum ipſius 3B unde motus ponderis 3A idem futurus eſt, qui foret ſi à gravitate acceleratrice $\frac{1}{4}f$ moveretur, dum 3B interim movetur à gravitate acceleratrice f. Atqui vires ftM & $\frac{1}{4}f \times t \times 4M$ ſunt vires æquales, quare vires vivæ hoc caſu in 3B & 3A ad ſingula loca reſpondentia deſcenſus unius & aſcenſus alterius ponderis eſſent æquales; conſequenter, ſub ipſum initium motus hujus vires ſunt æquales; ſunt autem in motus initio vires moventes preſſiones reciprocæ, inde cum presſio f corporis 3B in corpore 3A quadruplo prioris premat ſurſum quantitate $\frac{1}{4}f$ ſequitur corpus 3A ſub his vectis conditionibus deorſum premere quaſi cum $\frac{1}{4}f$ gravitatis acceleratricis; conſequenter motus fit nullus. Et ſic incidimus in Demonſtrationem æquilibrii vectis ex conſideratione verarum preſſionum in quibus nulla velocitas ne quidem naſcens ineſt, ut quies æquilibratorum requirit. Nempe in vecte quovis

quovis si ponderis 3B gravitas acceleratrix sit f, erit ponderis 3A gravitas acceleratrix $\frac{AC}{CB} \times f$, unde cum totus nisus seu pressio tota ponderis sit ut factum ex gravitate acceleratrice in massam, erit $f \times 3B$ ex una parte & $\frac{AC}{CB} \times f \times 3A$ ex altera parte quantitas pressionis, in æquilibrio autem debet esse $f \times 3B = \frac{AC}{CB} \times f \times 3A$ quare $CB \times 3B = AC \times 3A$ seu in æquilibrio erit $3B : 3A = AC : CB$.

Sed, misso quod incidenter sese obtulit, pariter evidens est, si vectem nihilominus moveri supponamus ut ante, cuicunque vi vivæ æqualis est vis motrix ipsius B in 4B, eidem æqualem esse vim motricem corporis A in 4A. Jam cum vectis non possit moveri, nisi AC fuerit paulo minor quam $\frac{1}{4}$ CB, corpus 3A non ascendet penitus per quatuor pedes, & vim vivam acquiret paulo minorem vivâ ipsius B in 4B, & quâlibet alia minorem cui vis viva ipsius B æqualis est. Sit ejusmodi vis ea, quam acquirit A cadens ex 1A per pedem unum, & vis quam acquirit 3A prope 4A minor est vi corporis A genitæ motu per pedem unum. Non igitur verendum est, si corporis quadrupli cum simpla velocitate vis æqualis dicatur vi corporis simpli cum quadrupla, fore ut effectus sequatur causa major, utpote elevatio corporis ejusdem quadrupli per pedes quatuor, ex vi qua corpus idem ascendere tantum potest per pedem unum, qualem vim scilicet in descensu per pedem unum acquisiverat. Elevatio illa per quatuor pedes ope vectis facta alia plane est ab ea, quæ cum velocitate initiali ad hoc requisita (nempe dupla velocitatis ipsius A in 2A post descensum per pedem unum) & motu liberi ascensus fieret. Et sic removetur absurdum perpetui mobilis *Leibnitiani Act. Er. a. 1690. p. 235.*

Fig. 11. Schol. Circa principium æquilibrii paulo ante novâ ratione ostensum alia quoque occurrunt, quæ demonstrando illi idonea sunt Nam si assumseris cum *Archimede* ipsis AC CB æqualibus, pressiones in A & B esse æquales, & proinde quamlibet ipsarum $\frac{1}{2}$P, pro vecte *Fig.* 11. in quo AC : CB = 2 : 1 facilem calculum ordinabis, ut sequitur, P premit in D & in B, D in A & C, C in B & D, D in A & C & sic pergendo habebis

B $\frac{1}{2}$
P 1 A $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{8}$
C $\frac{1}{4}$ A $\frac{1}{16}$
D $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{32}$
C $\frac{1}{16}$ A $\frac{1}{64}$
D $\frac{1}{32}$ &c.
C $\frac{1}{64}$

Collige omnes pressiones in A exercitas, nec non in B seorsim In A exercentur pressiones $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. in B vero $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}$ &c. Summa prima est $\frac{1}{3}$, secunda $\frac{2}{3}$; ut adeo sit Pressio in A ad pressionem in B ut BC : AC. Sit AC : CB = $m : 1$; Dico, si in vecte in quo distantiæ punctorum A & B a puncto C sunt ut $m - 1 : 1$, & quem proxime præcedentem appellare licet, obtinet Lex reciprocationis distantiarum respectu pressionum in A & B; eandem etiam obtinere in vecte proposito in quo AC : CB = $m : 1$. Nam P ut 1 agit in D ut $\frac{1}{2}$ & in B ut $\frac{1}{2}$, pressio autem in D in vectis AC (qui est proxime præcedens, distantiarum $m - 1$ & 1, à puncto D) extremis per *hyp.* sequitur Legem reciprocationis unde $m - 1 : 1$ = pressio in C ad pressionem in A, vel designando pressiones in C & A per has literas fit $m - 1 : 1 = C : A$, & $m : 1 = C + A$ vel $D = \frac{1}{2} : A$, unde pressio in $A = \frac{1}{2m}$; & $1 : m - 1 = A$ vel $\frac{1}{2m}$ ad pressionem in C, quæ proinde est $\frac{m-1}{2m}$, & hoc modo pergendo subducitur calculus generaliter sequentem in modum P, 1

B $\frac{1}{2}$

P, 1. A $\frac{1}{2m}$

D $\frac{1}{2}$ B $\frac{m-1}{4m}$

C $\frac{m-1}{2m}$ A $\frac{m-1}{4m^2}$

D $\frac{m-1}{4m}$ B $\frac{\overline{m-1}^2}{8m^2}$

C $\frac{\overline{m-1}^2}{4m^2}$ A $\frac{\overline{m-1}^2}{8m^3}$

D $\frac{\overline{m-1}^2}{8m^2}$ &c.

C $\frac{\overline{m-1}^3}{8m^3}$

Unde presſiones omnes in A exercitæ fiunt, $\frac{1}{2m} + \frac{m-1}{4m^2} + \frac{\overline{m-1}^2}{8m^3} + \frac{\overline{m-1}^3}{16m^4}$ &c. ſeu $\frac{1}{m+1}$ & presſiones in B $\frac{1}{2} + \frac{m-1}{4m} + \frac{\overline{m-1}^2}{8m^2} + \frac{\overline{m-1}^3}{16m^3}$ &c $= \frac{m}{m+1}$. Quare presſio in A ad presſionem in B eſt ut $1 : m$ vel ut CB : AC. Patet igitur in ſerie vectium in quibus ſunt AC : CB ſucceſſive ut 2:1 3:1 4:1 5:1 &c. ſi Lex æquilibrii obtineat in uno, eandem etiam obtinere in omnibus, ſeu indefinite in vecte in quo dicta ratio eſt ut $m:1$, qua re redditur demonſtratio generalis, reliquis vectibus, in quibus eſt ratio diſtantiarum $m:n$, facile etiam applicanda.

Schol. 2. In perpetuo mobili *Leibnitiano* patuit effectus usque ad elevationem ipſius A ex 3A in 4A non creſcere ſed minui potius, cum aſcenſus per totos quatuor pedes 3A 4A ope vectis æqualis futurus ſit deſcenſui libero ex 1A in 2A, corpus vero ele- *Fig. 12.*

 vari

vari non possit per integros quatuor pedes, sed per spatium aliquanto minus, Jam vero ex 4 A libere cadat per idem spatium 4 A 3 A & in 3 A acquiret velocitatem fere duplam primæ in 2 A casu ex 1 A acquisitæ, & sic vis in hoc ultimo statu corporis A, videlicer postquam descendit ex 4 A in 3 A, fiet major ea quam habuit ex descensu per 1 A 2 A. Hoc autem motui perpetuo favet; nec proinde omnis difficultas sublata videtur, quam *Leibnitius* movit. Sed eadem difficultas inest in mensura virium *Leibnitiana*, cum & hic identitas consequentis & antecedentis status ad descensum ex 4 A in 3 A interrumpatur. Sit enim corporis B simpli velocitas dupla, ut vult *Leibnitius*, eamque descendendo per quatuor pedes ex 3 B in 4 B denuo acquirat, postquam perdiderat ascendendo per simile spatium; manifestum est quadruplum corpus ex 3 A in 4 A sublatum per unum fere pedem, accelerari inter ascendendum & in 4 A acquirere fere quartam partem velocitatis ipsius B in 4 B, id est dimidiam ejus velocitatis quam A acquisiverat in 2 A, idque tempore duplo ejus, quo A descendendo in 2 A acquisiverat suam. Ex *Leibnitii* igitur mensura corpus A in 4 A a vecte sublatum vim acquisivit subquadruplam ejus quam habuit in 2 A. Jam recidit ex 4 A in 3 A & in 3 A integram fere recuperat, cum 4 A 3 A æqualis fere sit altitudini primæ unius pedis. In duobus igitur statibus se consequentibus habentur vires ut 1 ; 4, & ideo æqualitas virium, seu identitas duorum statuum activorum corporis se immediate consequentium turbatur & interumpitur ad 4 A, motusque perpetuus proinde conservatur etiam in mensura *Leibnitiana*. Et hæc una responsio est ad dubium propositum, qua difficultas ex motu perpetuo desumta retorquetur in mensuram virium *Leibnitianam*, inferendo ubique ex auctoris hypothesi, & ex concessis.

Sed in genere hinc patet etiam, effectus in duobus statibus consequentibus, etiamsi respectu virium suarum pleni sint, non iden-

identificari indiscriminatim, & in ratiocinio Leibnitiano aliud quid esse quam mensurum virium assumtam ut $m \times v$, in quo absurdum perpetui motus lateat. Quod ut ulterius appareat proponimus modum alium efficiendi motum perpetuum, in quo perinde est qua virium mensura utare.

Sit 4 A 2 A Curva aliqua in qua ascendat mobile aliqua velocitate initiali quæ ascensu hoc possit destrui; in 2 A autem incidat in vectem, ut *Leibnitianum* B ascendendo per 2 B 3 B *Fig.* 12. patet quod descendendo per 2 A 3 *a* elevare possit corpus sibi æquale per 1 B 2 B spatium fere æquale ipsi 3 *a* 2 A. Jam hoc 1 B ad 2 B incidat in vectem 1 C 2 B, & 2 B descendendo in 3 *b* elevabit aliud sibi æquale C per spatium 1 C 2 C ipsi 2 B 3 *b* fere æquale, id est non multo minus. In 2 C autem corpus C sublatum applicetur vecti D 2 C, & descendendo per 2 C 3 *c* elevabit aliud sibi æquale D per spatium D 2 D ipsi 2 C 3 *c* fere æquale. Sic pergendo quantum lubet spatia elevationum crescunt in ratione fere 1 : 2 idque continuo. Unde si lubeat terminare alicubi seriem vectium, ut *e. g.* in tertio vecte, ut in Figurâ, poterit ordinari vectis 2 D 4 A, cujus ope D descendens ex 2 D in 3 *d* elevabit corpus sibi æquale ex 4 A per altitudinem æqualem fere ipsi 2 D 3 D; & corpus $m \times$ D per altitudinem, quæ fere sit $\frac{1}{m}$ 2 D 3 *d*; sit $m = 4$, & corpus 4 D seu quadruplam ejus quo hactenus usi sumus elevabitur ad altitudinem fere $\frac{1}{4}$ 2 D 3 *d* = $\frac{1}{4} \times 8$ 3 *a* 2 A fere; ex hac autem altitudine descendendo impellet aliam seriem vectium & elevabit corpus sibi æquale ad altitudines continuo majores, nec erit huic progressui finis, quamdiu adsint vectes & corpora. Sed ut in excutienda hac imaginatione perpetui motus operosi hic simus opus non est, cum sufficiat nobis hac ratione ostendisse, ubi vectes supponuntur & corpora ubi libet, & commiscentur vires vivæ debitæ impressionibus vectis cum iisdem acquisitis libero gravium descensu Fig. 13.

vel aſcenſu motum perpetuum conſequi, quacunque virium hypotheſi utare. Hæc igitur ſit reſponſio altera.

Si quis quæſiverit, quid fiat viribus & velocitatibus acquiſitis aſcenſu ex 1B in 2B &c. quando 2B ſupponitur ſtatim recidere ubi attigit extremum 2B vectis 2B 1C; nos viciſſim quæremus in caſu menſuræ virium *Leibnitianæ* quid fiat velocitati corporis A in 4A, poſtquam elevatum fuit per pedem unum a corpore B, per quatuor pedes ex 3B in 4B moto; velocitas hæc eſt fere $\frac{1}{4}$ velocitatis corporis B in 4B & adeo $\frac{1}{2}$ velocitatis acquiſitæ ab A in primo deſcenſu ex A in 2A, unde corpus ad 4A vim adhuc habet aſcendendi per unam quartam pedis fere ultra 4A, motu retardato. Jamſi hic aſcenſus pertinet ad effectum plenum corporis B deſcendentis per quatuor pedes & acquirentis in 4B duplam velocitatem ejus quam A habuit in 2A, vis ipſius A quam deſcenſu per 1A 2A ex unius pedis altitudine acquiſiverat, effectum parit ſe ipſa majorem, nempe vim aſcendendi in corpore æquali ad $\frac{1}{4}$ unius pedis fere; & ſic habetur motus perpetuus ex menſura virium *Leibnitiana* & inferendo ut ipſe fecit, utpote in effectu cauſa ſua majore. Addimus de recepta menſura hoc unum, ſi ſumantur deſcenſus ipſius A in 2A & B ex 3B in 4B ſimul, in hypotheſi vulgari priorem ſummam poſteriori æqualem eſſe, in *Leibnitiana* autem priorem eſſe majorem. Nam juxta menſuram vulgarem eſt prior ſumma virium $ft\,4M + f \times 4t \times M$ poſterior $\frac{1}{4} f \times 4t \times 4M + ft \times 4M$; juxta *Leibnitianam* $fs \times 4M + f \times 4sM$ prior, & poſterior $\frac{1}{4} f \times s \times 4M + f \times \frac{1}{4} s \times 4M$; eſt vero prior ſumma poſterioris quadrupla, qua imminutione non obſtante vis a corpore per $\frac{1}{4}$ pedis recidente acquiritur $f \times \frac{5}{4} s \times 4M = 5fsM$ major vi prima $4fsM$ quam A acquiſiverat deſcendendo ex 1A in 2A, una quarta magnitudinis ſuæ.

PROPO-

PROPOSITIO V.

In Isochronismo corporis moti nihil est quod prohibeat corporis vim æstimari per S. fdt.

Sit ADC Cyclois ordinaria; & ex ejus Geometria constat esse $EC : FC = fd : Dd$, hoc est, vocando CE x, $BC = a$, $Dd = ds$, erit $x : \sqrt{ax} = -dx : ds$ seu $ds = \frac{-dx\sqrt{ax}}{x}$, unde vis acceleratrix per Dd erit $\frac{dx}{ds} \times f = \frac{x}{\sqrt{ax}} \times f = \sqrt{\frac{x}{a}} \times f$. Sit $HC = b =$ altitudini puncti α a quo incipit corporis motus in Curva; & $vdv = fds$ fiet $= f \times \sqrt{\frac{x}{a}} \times \frac{-dx\sqrt{ax}}{a} = -fdx$, unde $v^2 = -2fx + 2fb$, cum posita $x = b$, v fiat Zero, ob motum in Horizontali αH incipientem. Est igitur $\frac{ds}{v}$ seu dt æquale quantitati $\frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} \times \sqrt{\frac{a}{2f}}$ seu ipsi $\frac{Ee}{KE}$ hoc est $\frac{KL}{\frac{1}{2}HC}$ proportionale, & adeo t seu tempus descensus per αD erit ut angulus KIH seu ut $\frac{KH}{\frac{1}{2}HC}$. Huic temporis mensuræ innititur Isochronismus. Nam tempus per quemlibet arcum αC fit duobus rectis angulis proportionale ubicunque supponatur α initium Descensus. Jam his omnibus suppositis, quæritur, quomodo descensu ex diversis α constanti tempore facto conferri possint vires motrices inæquales ubi pervenit ad C. Et sufficere poterat responsio, id eodem modo fieri, quo motus inæquales mobili conferuntur in C, æquali tempore per diversos arcus αC descendenti; imprimis quando nihil specifici afferunt objectores, ex quo perspici possit, quod posito tempore eodem, quo acquiruntur vires magnæ & parvæ, ipsas has vires ex S. fdt æstimari non posse sequatur. Certe quam diu hoc non fit, vel inferendum est motus inæqua- Fig. 9.

inæquales altitudinibus tantum deberi, vel possibile esse, ut virium inæqualitas non obstante temporum æqualitate a solis spatiis non pendeat. Interim expedit pauca in hanc rem adhuc commemorari. Velocitates in C acquisitæ sunt ut radices altitudinum descensus, seu ut $\sqrt{HC}$, si corpus descendit ex α, hoc est ut $9C$, vel ex Cycloidis natura ut αC spatia percurrenda, unde S. fdt incipiendo a puncto quolibet est ut αC, & sic ex Cycloide sequitur inæqualitas virium acquisitarum à corpore descendente ex diversis α punctis. At ex Isochronismi conditione sequitur Cyclois ipsa; unde etiam ex Isochronismi conditione sequitur inæqualitas virium acquisitarum, quæ proportionantur summis fdt. Si f constante, tempora æqualia prodirent, prodirent æquales ipsæ v utpote quæ essent ut ft seu ut t, neque hic possibile esset virium inæqualitatem intelligere. Hoc casu quæstioni locus esset quomodo inæquales sunt vires tempore eodem, vel quod idem, quomodo ex tempore, quod constans est penderent vires inæquales? Sed in variabili f, ipsæ S. fdt non sunt ut t; quam constans igitur sit t, nihil impedit quo minus vires inæquales pendeant à S. fdt.

Schol. Celeb. *Jac. Hermannus* in responsionibus ad Clarckii objectiones *T. 1 Comment.. Petrop. p. 38.* ex eo quod vires (quæ hic velocitatibus proportionales sunt) acceleratrices in principio cujus libet arcus describendi sint ut arcus ipsi, merito infert vires quadratis velocitatum proportionales ad C acquiri; Sed in hypothesi, de qua supra, quod vires acquisitæ sint summæ virium mortuarum seu proportionales ipsis fds.

PROPOSITIO VI.

In omni virium mutatione velocitates sic non mutantur ut summæ productorum ex quadratis velocitatum in corpora maneant, quæ erant ante mutationem.

Cas. 1.

Cas. 1. In motuum compositione, ex viribus velocitatum A B AC, derivantur vires Velocitatum AE AD EB CD. Ante mutationem summa productorum est ut $AB^2 + AC^2$, post mutationem, ut $AE^2 + AD^2 + 2CD^2$. Quamvis autem vires ad quas pertinent velocitates CD & BE ex quibus oritur $2CD^2$, sopitæ sint & virtualiter tantum præsentes, quando corpus movetur velocitatibus A E + A D id est in recta A F, possunt tamen & ipsæ successive *Fig.* 15. expediri & reduci in actum. Et in genere omnes hæ vires nempe quæ movent cum velocitatibus AD AE CD BE juxta proprias directiones possunt effectus suos producere, & eos producendo consumi, Cum vero vires omnes velocitatem consumentes sint areæ ad scalam virium proportionales, hoc est quadrato velocitatis consumtæ, hinc fit ut tot & tanti edantur effectus a vi cum velocitate movente, quot & quanta ex ea derivari possint hujusmodi velocitatum quadrata. Sit CAB rectus, & $AC = 1, AB = \sqrt{3}$, ut fiat AF 2 & $AE = \frac{3}{2}$ $CD = \sqrt{\frac{3}{4}}$ $AD = \frac{1}{2}$, unde $AB^2 + AC^2$ vel $AE^2 + AD^2 + 2CD^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{16}{4}$ seu $4 = 4AC^2$, hinc est quod vires hæ omnes successive flectere possint quatuor elastra, quorum quodlibet flectitur velocitate $AC = 1$, vel quatuor alia quorum primum flecti potest à vi cum velocitate $\frac{3}{2}$ secundum cum velocitate $\sqrt{\frac{3}{4}}$ tertium cum velocitate eadem $\sqrt{\frac{3}{4}}$ quartum cum velocitate $\frac{1}{2}$, vel etiam tria, primum cum velocitate ut $\frac{3}{2}$ secundum cum velocitate $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ tertium cum velocitate $\frac{1}{2}$. Præterea si CAB rectus fuerit & $AC = 1$, $AF = 2$ ut ante, manifestum etiam est, vim cum AF agentem flectere quadruplum elastrum ejus quod flectit vis cum AC velocitate; si sit æqualis rigoris, & resistat eadem lege cum simplici, verbo si simile ipsi sit. Hic ubique conservantur summæ quadratorum ex velocitatibus. Sed si BAC acutus fuerit, conservantur ut ante AD^2 $2CD^2$ AE^2 æquales in summa quadratis AB & AC, non autem in compositione seu in vi cum velocitate AF; hic enim non est $AF^2 = AD^2 + 2CD^2 + AE^2$ sed $AF^2 =$

D AD²

$AD^2 + AE^2 + 2AE \times EF$, est vero $2AE \times EF > 2CD^2$. Et eodem modo ubi BAC sit obtusus AF^2 minus sit summa $AD^2 + AE^2 + 2CD^2$ cum sit $2AE \times EF < 2CD^2$. Maximum elastrum quod flecti potest in primo casu est ut $\overline{AC + AB}^2$, minimum in secundo $\overline{AB - AC}^2$. In vi composita igitur non conservantur semper summæ quadratorum velocitatum ante & post factam virium mutationem.

Fig. 61. Cas. 2. In percussionibus corporum non elasticorum A in ictu ad occursum ipsius B perdit velocitatis suæ aliquam partem x Hæc x ipsi B non communicatur tota propter vim inertiæ, sed pars ejus tantum confertur $\frac{A}{B}x$; hæc igitur pars velocitatis augetur velocitate ipsius B, quam b vocabimus, si motus ante percusfionem fiant in eandem plagam, vel minuitur, si contrariam; unde B habebit post conflictum velocitatem, $\pm b + \frac{A}{B}x$ & hæc ipsa velocitas æqualis esse debet residuæ ipsius A velocitati. Sit a velocitas initialis A, & erit $a - x = \pm b \frac{A}{B} x$, unde x velocitas post ictum decidens ipsi A erit æqualis quantitati $\frac{a \mp bx}{A + B}$ B; hæc igitur est pars velocitatis ipsius A in conflictu translata in B & decidens ipsi A. Unde residua seu $a - x$ fit $a - \frac{a \mp b}{A + B} \times B$ seu $\frac{Aa \pm B}{A + B} b$, ut alias notum est. Summa productorum ex quadratis velocitatum in corpora ante conflictum est $Aa^2 + Bb^2$, post conflictum $\frac{\overline{Aa \pm Bb}^2}{A + B}$ quorum posterius semper differt a priori. Hic igitur hæ summæ ante & post virium mutationem non manent. Manent autem motuum quantitates in plagam eandem, id quod quantitatem directionis vocare visum est summo Viro *Io. Bernoullio*.

Sint corpora A & B elastica & tendant in plagam eandem versus D, erit motus ex vi inertiæ mutatus pro A quidem post conflictum

$Aa +$

$\frac{Aa+Bb}{A+B} \times A$ & eodem modo pro mobili B, quod præcedit, erit motus $\frac{Aa+Bb}{A+B} \times B$ post conflictum. Restituto deinde per elaterem $a - b$, subducitur motui ipsius A quantitas $\frac{AB \times \overline{a-b}}{A+B}$, & additur eadem motui ipsius B, unde motus, qui hoc casu sunt effectus compositi procreati a duplici causa fiunt

$$\text{pro A, } \frac{Aa+Bb}{A+B} \times A - \frac{AB \times \overline{a-b}}{A+B} = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B} \times A$$

$$\text{pro B, } \frac{Aa+Bb}{A+B} \times B + \frac{AB \times \overline{a-b}}{A+B} = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A+B} \times B$$

quorum summa est $Aa+Bb$ summa quadratorum velocitatum in massas Aa^2+Bb^2. Et vice versa si posueris $Ax+By=Aa+Bb$ & $Ax^2+By^2=Aa^2+Bb^2$, invenies valores x & y æquales valoribus motuum post conflictum pro A & B.

Si corpora tendunt in partes contrarias per vim inertiæ erunt motus post conflictum $\frac{Aa-Bb}{A+B} \times A$ & $\frac{Aa-Bb}{A+B} \times B$ & accedente elatere subducitur ex uno & adjicitur alteri quod cuilibet restituit vis elastica ex velocitate relativa $\frac{BA \times \overline{a+b}}{A+B}$ & fit

$$\text{pro A } \frac{Aa-Bb}{A+B} \times A - \frac{BA \times \overline{a+b}}{A+B} = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A+B} \times A$$

$$\text{pro B } \frac{Aa-Bb}{A+B} \times B + \frac{BA \times \overline{a+b}}{A+B} = \frac{2Aa + Ab - Bb}{A+B} \times B$$

quorum summa est $Aa-Bb$, id est differentia motuum ad partes contrarias, & summa productorum ex velocitatum quadratis in massas Aa^2-Bb^2 ut ante conflictum.

Cas. 3. In pendulo composito ex ponderibus A & B ad distantias BD & AD a centro suspensionis D, affixis virgæ rigidæ & non gravi, sit in K centrum oscillationis (in primo Diagrammate *Figuræ* 16.) *Fig.* 16.

& punctum K penduli simplicis in ipso initio sui descensus acquirit idem *du*, quod acquirerent A & B in suo descensu si non connecterentur nec in se invicem agerent; sit jam motus ipsius B in pendulo composito nascens x & erit velocitas nascens $\frac{x}{B}$; estque hæc $\frac{x}{B}$ ad velocitatem nascentem puncti K (in pendulo simplici propter *hyp.* Isochronismi) ut DB ad DK, unde si velocitatem illam nascentem puncti K vocemus 1, erit $DB:DK = \frac{x}{B}:1$ ideoque $DK = \frac{B \times DB}{x}$. Jam ubi A & B affixa sunt virgæ rigidæ, motus ipsius B qui absque ponderum connexione foret ut $B \times 1$ minuitur, cum B eodem instanti necessario minorem arcum describat quam A, & post imminutionem factam sit x per *hyp.* consequenter decidet ipsi $B \times 1 - x$, & hæc pars decidens ipsi A confert aliquid incrementi ad motum quem jam habet, nempe $\frac{DB}{DA} \times B - x$ unde motus totus ipsius A fit $A \times 1 + \frac{DB}{DA} \times \overline{B - x}$ seu $\frac{DA \times A + DB \times B - DB \times x}{DA}$ & velocitas puncti A in pendulo composito $\frac{DA \times A + DB \times B - DB \times x}{DA \times A}$ sed est hæc velocitas in pendulo composito ad velocitatem ipsius B in eodem seu ad $\frac{x}{B}$, ut DA:DB unde $DB:DA = \frac{x}{B}:\frac{DA \times A + DB \cdot DB \times x}{DA \times A}$ & $x = \frac{A \times B \times DB \times DA + DB^2 \times B^2}{AD^2 \times A + DB^2 \times B}$ quo valore substituto in DK $= \frac{B \times DB}{x}$ fit $DK = \frac{AD^2 \times A + DB^2 \times B}{A \cdot DA + B \times DB}$. Hic igitur $AD^2 A + DB^2 \times B$ constantis fit magnitudinis, AD & DB actuales velocitates denotantibus, quas habent pondera in pendulo composito mutuis actionibus se agitantia, AD^2 & DB^2 vero spatia in quibus cadendo eodem tempore possunt acquiri.

Fig. 15. Cor. In casu primo vires elastrorum totæ non actiones virium, velocitates consumentes, habentur. Est vero elastri quod flectitur

ſtitur a vi compoſita cum AF velocitate vis abſoluta nunc major nunc minor nunc æqualis viribus elaſtrorum quæ flectuntur cum velocitatibus AB AC. Hinc ſequuntur hæc duo: 1. vires componentes non ineſſe in vi compoſita, ſcilicet AB AC in AF ut partes inſunt in toto, ſi etiam ſupponamus eandem rationem harum virium cum ratione elaſtrorum, ut *Leibnitius* & qui eum ſequuntur, poſtulant.

2. Vires omnino non eſſe in ratione quadratorum velocitatum; ſi enim eſſent, ineſſent componentes vires minimum in caſu anguli CAB recti in vi compoſita juxta AF ut partes in toto.

Schol. Jam ſupra notavimus ubique aſſumi, quod eſt in quæſtione, & quo tota controverſia recidit, vires corporis moti æquales eſſe ſummæ quantitatum abſolutarum in mortuis; & adeo conferendo motum conferre has vires aliquid ſibi ſimile, a motu ipſo diverſum, vel certe ſupponi gravitatem elateres & omnes vires acceleratrices in corpora mota eodem modo agere, quo in quieſcentia; antequam hoc probetur nemo jus habet vi corporis moti ſubſtituere ſummam illam abſolutam virium acceleratricium. Porro ubi ſupponitur vim compoſitam continere componentes tanquam partes, ut in caſu anguli recti aſſeri poſſit vim juxta diagonalem eſſe ad quamlibet componentium in duplicata velocitatum compoſitæ & componentis, non evitatur difficultas anguli obliqui compoſitionis. Vidit hanc difficultatem pro ea qua pollet perſpicacia, Clariſſimus *Bülffingerus p. 60 T. 1. Comment. Petrop.* Sed remedio utitur ipſo malo pejore, dum mutat velocitates componentium obliquarum in componentes normales, unde deinde Theoremate 8. neceſſe habet in caſu coincidentiæ directionum componentium vim juxta diagonalem non aggregato virium componentium, ſed quadrato aggregati velocitatum æqualem facere, quod ipſe pro parodoxo habet p. 62. & in Scholio excuſare conatur; primo ſupponendo de quo quæritur, *dum hoc non evitari poſſe* fatetur *niſi vel Leibnitia-*

na virium æstimatio negetur vel recepta motuum compositio, in quo nos habet consentientes. Secundo monet in viribus imprimendis aliam rationem esse quam in viribus impressis; in illis compositam aggregato componentium æqualem esse, ut in casu anguli recti, non autem ideo in his in casu anguli obliqui. Sed hic docendum erat, quare in impressis obtineat in casu anguli anguli recti & non obtineat in casu obliqui. Tertio utitur instantia & quærit quare in casu anguli cujuscunque non sit æqualitas inter compositam & summam componentium in mensurâ virium per velocitatem. Ad quod respondemus, quoniam nemo eorum qui stant pro mensura per velocitates, ausus est vim compositam ex componentibus compingere tanquam totum ex partibus id est Trianguli latus unum æquale facere summæ laterum reliquorum. Itaque non stringunt argumenta quibus mensuram virium *Leibnitianam* stabilire conantur sic inferendo. Componatur vis corporis A moti juxta AB ex viribus juxta AE EB moventibus æquali velocitate, supponendo nempe $AE = EB$, & adeo æqualibus, impingat vero A in B ipsi æquale, & post conflictum B vim juxta EB communicabit ipsi C totam, vi vero juxta AE movebitur ipsum B cum velocitate $BF = AE$ velocitati. Jam vis corporis A est ad vim corporis B ut $2:1$, (cum vis ipsius A divisa sit in duas vires æquales corporum B & C) & ideo ut $AB^2 : AE^2$. Hic nihil dicitur de viribus quod de motibus non valeat; nam uti vires B est C insunt in vi AB, sic etiam motus corporum B & C insunt in motu corporis A. Quid igitur est quod diversæ conclusiones prodeant ex iisdem suppositis. *Bülffingerus* Theorema 2. Dissertationis de viribus corpori moto insitis hujusmodi habet *Si duæ vires vivæ* (addamus perspicuitatis causa AB AC, supponendo angulum ABC rectum) puræ eidem corpori A inexistentes ita agant, &
Fig. 15. ad producendum *aliquem motum absolutum concurrant, ut neutrius motus motum alterius in sua directione & celeritate augeat vel minuat; tum actio composita ex actionibus virium illarum resultans æqualis est*

aggre-

aggregato actionum singularum Demonstratio: *Actio composita aut aequalis est aggregato singularum, aut major aut minor; Non major quia neutra alteram auget, dum ita concurrunt, ut neutrius motus per motum alterius in sua directione & celeritate promoveantur non minor, quia neutra alteram in concursu suo impedit aut motum ejus imminuit. Igitur est aequalis.* Nisi fallimur aut haec demonstratio valet de motu composito propter easdem rationes perinde ac de vi; aut nihil aliud probat quam quod componentium neutra evadat neque major neque minor, aut plane nihil probat, sed repetit propositionem aliis verbis. Certe hinc non liquet quomodo ex eo, quod quaelibet componentium maneat constans, sequatur compositam nec majorem nec minorem esse summa componentium. Notandum autem huic propositioni superstrui totum Tractatum. Quicquid sit, in vi juxta AF nihil videtur inesse posse virium componentium, quam quod hae vires edunt juxta AF, scilicet AE & AD vel EF, viribus CD EB plane nihil conferentibus ad vim juxta AF quamdiu haec compositio durat; & hoc posito cum habeamus $AF = AD + AE$, quicunque fuerit compositionis angulus CAB, erit vis composita ad id virium componentium quod continet in ratione aequalitatis, unde sequetur vires esse ut velocitates. Qui aliter sentiunt, duas quaslibet vires cuilibet tertiae aequipollentes statuere tenentur aequales, quod tamen non nisi in contrariis directionibus locum habere potest. Sed dum in casu tertio & quarto expendendo versamur & varia prioribus adjicere in animo habemus, invincibili obstaculo hic sistimur, & alii occasioni reservare cogimur, quae supererant.

ADDITIO.

Ubi in Demonstratione Propositionis 2. ponimus dF augeri in ratione minore, scribendum erat $n < m$ loco $n > m$; secundo tota demonstratio festinatione scribentis implexa sic debuit explicari

Augea-

Augeatur Rdt in ratione $m:1$ & si fieri potest augeatur dF in ratione minore $n:1$; v. c. aucto Rdt in ratione $3:1$ & dF in ratione $2:1$ fiet ex dF, $2dF$ ex dv, $3dv$, & sumtis differentiis cum $2dv$ conjungitur dF, quod conjungebatur cum dv paulo ante, id est cum $m-1dv$ conjungitur $n-1\,dF$, consequenter dv majore dF non est major contra *Sup. 3.* &c. vel sic etiam, mutetur dF in ratione $n:1$ minore ipsa $m:1$; & si $m:1$ fit ratio æqualitatis, fit $n:1$ ratio minoris inæqualitatis quare $ndF < dF$ $mdv = dv$, nunc hic primo cum dv conjungitur dF, deinde cum dv conjungitur ndF ipso dF minus contra *Sup. 3.*

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.) *Vires animæ quantitatem habere adeoque sub mensuram cadere.*

II.) *Causam gravitatis haud recte explicari per gyrationem materiæ subtilissimæ circa terram in circulis maximis.*

III.) *Vires non semper proportionales esse effectui, quem producunt.*

IV.) *Calculum etiam rerum moralium esse possibilem.*

V.) *Non omnes motus & vires debentur impulsibus corporum motorum.*

VI.) *Vires & actiones puræ & impuræ, effectus nocui & innocui nomina sunt nihil significantia.*

VII.) *Vires motrices quæ sunt corporum motorum non magis conservantur, quam motus ipsi.*

VIII.) *Insignificanter & absque idea dicitur vires motibus contrariis corporum non elasticorum destructas post conflictum dissipari per moleculas corporum elasticas & hoc modo conservari.*